# Непрерывность функции многих переменных

Пусть функция $u=f(M)$ определена на множестве ${M}   
\subset \R^m$ и пусть точка $A\; \in {M}$ и является   
предельной точкой множества ${M}$.  
Определение. Функция $u=f(M)$ называется *непрерывной* в точке A, если

*Точка разрыва* функции $u=f(M)$ - это предельная точка множества  
{M}, в которой $f(M)$ не является непрерывной.

*Определение*. Приращением (полным приращением) функции $u=f(M)$ в точке A называется функция $\Delta u = f(M) - f(A)$.   
Условие (9.2) непрерывности функции в точке A можно записать в виде:

Равенство (9.3) называется *разностной формой условия непрерывности функции в точке A.*  
Пусть точки M и A имеют координаты: $M(x\_1,...,x\_m)$ и   
$A(a\_1,...,a\_m)$. Положим $\Delta x\_1 = x\_1 - a\_1,...,\Delta x\_m = x\_m - a\_m$, тогда $x\_1 = a\_1 +\Delta x\_1,...,x\_m = a\_m +\Delta x\_m$.

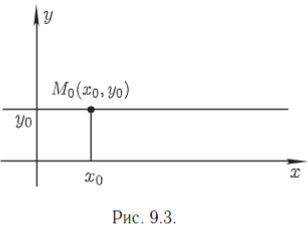
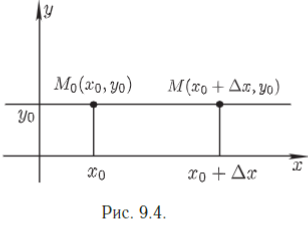
Разностная форма условия непрерывности функции принимает вид

$$\lim\_{\Delta x\_1 \to \infty \\ ..... \\ \Delta x\_m \to \infty} \Delta u=0.$$

Введем теперь понятие *непрерывности функции по отдельным переменным*.  
Рассмотрим функцию двух переменных $u=f(x,y)$. Зафиксируем значение аргумента y, положив $y=y\_0$(рис.9.3). Получаем функцию одной переменной $f(x,y\_0)$. Если эта функция непрерывна в точке $x\_0$, то есть $\lim\_{x\to x\_0} f(x,y\_0) = f(x\_0,y\_0)$, то будем говорить, что функция $u=f(x,y)$ непрерывна в точке $M\_0(x\_0,y\_0)$ по переменной x.

Аналогично определяется непрерывность функции $f(x,y)$ в точке $M\_0$ по переменной $y$.

Сформулируем другое (эквивалентное) определение. Из точки  
$M\_0(x\_0,y\_0)$ перейдем в точку $M(x\_0+\Delta x,y\_0)$, то есть дадим  
Приращение $\Delta x$ аргументу x(рис.9.4). Функция $u=f(x,y)$ получит приращение

Оно является функцией одной переменной $\Delta x$ и называется *частным приращением* функции $f(x,y)$ в точке $M\_0$, соответствующим приращению $\Delta x$ аргумента x.  
  


*Определение*. Функция $u=f(x,y)$ называется непрерывной в точке $M\_0(x\_0,y\_0)$ по переменной x, если $\lim\_{\Delta x \to 0} \Delta\_x u = 0$.

Аналогично определяется непрерывность функции $u=f(x\_1,...,x\_m)$ в данной точке по отдельным переменным.  
Непрерывность функции, определённую условием (9.2) (или 9.3), называют также *непрерывность* по совокупности переменных.

*Теорема 6*. Если функция $u=f(x,y)$ определена в окрестности точки $M\_0(x\_0,y\_0)$ и непрерывна в точке $M\_0$, то она непрерывна в этой точке по отдельным переменным.  
*Доказательство*. По условию $\lim*{x\to x\_0 \ y\to y\_0} f(x,y) = f(x\_0,y\_0)$. В частности, $\lim*{x\to x\_0} f(x,y\_0) = f(x\_0,y\_0)$, а это означает, что $f(x,y)$ непрерывна в точке $M\_0$ по переменной x. Аналогично доказывается непрерывность в точке $M\_0$ по переменной y.  
*Замечание*. Обратное к теореме 6 утверждение не верно.

## Основные теоремы о непрерывных функциях

Теорема 7 (арифметические операции над непрерывными функциями). Если функции $f(M)$ и $g(M)$ определены на множестве ${ M}$ и непрерывны в точке A, то $f(M)\plusmn g(M)$, $f(M)g(M)$, $\frac{f(M)}{g(M)}$(при условии $g(A) \neq 0$) непрерывны в точке A.

Утверждение теоремы 7 следует из теоремы 4 и определения непрерывности.

Пусть аргументы функции $u =f(x\_1,....,x\_m)$ являются не независимыми переменными, а функциями переменных $t\_1,...,t\_k$:

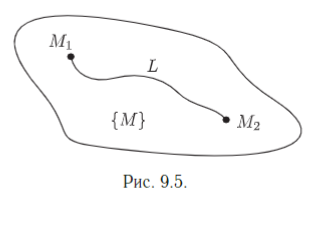
причем функции (9.4) определены на множестве ${\mathbb{K}(t\_1,...t\_k)} \subset \R^k$.  
В этом случае будем говорить что на множестве ${\mathbb{K}}$ определена *сложная функция* $u=f(\phi(t\_1,...,t\_k)),...,\phi\_m(t\_1,...,t\_k)$).  
*Теорема 8* (о непрерывности сложной функции). Пусть функции (9.4) непрерывны в точке $A (a\_1,...a\_k)$, а функция $u=f(x\_1,...,x\_m)$ непрерывна в точке $B(b\_1,...,b\_m)$. где $b\_1 = \phi\_1(a\_1,...,a\_k),...,b\_m =\phi\_m(a\_1,...,a\_k)$. Тогда сложная функция $u=f(\phi\_1(t\_1,...,t\_k),...,\phi\_m(t\_1,...t\_k))$ непрерывна в точке A.

*Теорема 9* (об устойчивости знака непрерывной функции).  
Если функция $u=f(M)$ непрерывна в точке $A$ и $f(A) > 0$(<0), то $\exist \delta$- окрестность точки A, в которой  
$f(M)>0(<0)$.  
Указание: для доказательства теоремы воспользуйтесь определением непрерывности функции в точке A и возьмите $\epsilon=|f(A)|$.

*Теорема 10* (о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение). Пусть функция $u=f(M)=f(x\_1,...,x\_m)$ непрерывна на связном множестве ${M}$, пусть $M\_1$ и $M\_2$ - две любые точки из ${M}$, $f(M\_1) = u\_1$, $f(M\_2) = u\_2$, и пусть $u\_0$- любое число из сегмента $[u\_1,u\_2]$.  
Тогда из любой непрерывной кривой $L$, соединяющей точки  
$M\_1$ и $M\_2$ и целиком принадлежащей множеству ${M}$, найдется такая точка $M\_0$, такая, что $f(M\_0)=u\_0$.  
*Доказательство*. Пусть

$$L=\{M(x\_1,...,x\_m):x\_1=\phi\_1(t),...,x\_m=\phi\_m(t),\alpha \leq t \leq \beta\}
$$- непрерывная кривая, соединяющая точки $M\_1$ и $M\_2$ и целиком принадлежащая множеству $\{M\}$ (рис. 9.5).
Точки $M\_1$ и $M\_2$ имеют координаты: $M\_1(\phi\_1(\alpha),...,\phi\_m(\alpha))$, $M\_2(\phi\_1(\Beta),...,\phi\_m(\Beta))$.
На кривой L заданная функция является сложной функцией переменной t:$$

u=f(\phi\_1(t),...,\phi\_m(t))=:F(t)

$$,  
причем по теореме 8 функция $F(t)$ непрерывная на сегменте $[\alpha,\beta]$. На концах сегмента $[\alpha,\beta]$ функция $F(t)$ имеет значения $F(\alpha) = f(\phi\_1(\alpha),...,\phi\_m(\alpha))=f(M\_1)=u\_1$ и $F(\beta) = f(M\_2) = u\_2$.  


В силу известной теоремы для функции одной переменной   
$\forall u\_0 \in [u\_1,u\_2] \exist t\_0 \in [\alpha,\beta]$, такое, что $F(t\_0) = u\_0$. Но $F(t\_0) = f(\phi\_1(t\_0),...,\phi\_m(t\_0)) = f(M\_0)$, причем точка $M\_0(\phi\_1(t\_0),...,\phi\_m(t\_0))\in L$.

Итак, $\exist$ точка $M\_0 \in L: f(M\_0) = u\_0$, что и требовалось доказать.  
Для доказательства следующих трёх теорем (первой и второй теорем Вейерштрасса и теоремы Кантора) нам понадобится  
*Лемма 3*. Пусть {$M$} - замкнутое множество и пусть последовательность точек {$M\_n$} $\to$ $A$, причем все $M\_n \in${$M$}. Тогда $A \in { M}$.  
*Доказательство*. Так, как {$M\_n$} $\to A$, то в любой $\epsilon$ - окрестности точки A содержатся члены последовательности {$M\_n$}. Тем самым, в любой $\epsilon$-окрестности точки A содержатся точки из множества {$M$}. Поэтому точка A - либо внутренняя точка множества {$M$}, и тогда она принадлежит этому множеству как и всякая внутренняя точка, либо $A$- граничная точка множества {$M$}, и тогда она принадлежит {$M$}, так как множество {$M$} - замкнутое множество (то есть содержит все свои граничные точки). Таким образом, в любом случае $A\in {M}$. Лемма 3 доказана.  
*Замечание*. Это утверждение аналогично следующему утверждению для одномерного случая: если все $x\_n \in [a,b]$ и {$x\_n$} $\to \epsilon$, то $\epsilon \in [a,b]$.

*Определение*. Функция $u=f(M)$ называется *ограниченной* на множестве ${M}$, если $\exist$ числа $C\_1 и C\_2$, такие, что $\forall M \in {M}:C\_1 \leq f(M) \leq C\_2$.

*Теорема 11* (первая теорема Вейерштрасса). Если функция $u=f(M)$ непрерывна на *замкнутом ограниченном* множестве {M}, то она ограничена на этом множестве.

*Доказательство*. Допустим, что $u=f(M)$ не ограничена на множестве {$M$}. Тогда $\forall$ натурального числа n$\exist M\_n \in {$M$}:|f(M\_n)| > n$. Тем самым последовательность {$f(M\_n)$} - бесконечно большая. Из ограниченной последовательности точек {$M\_n$} можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Пусть подпоследовательность {$M*{k\_n}$} $\to A$. В силу леммы 3 точка $A \in {M}$ и поэтому функция $f(M)$ непрерывна в точке A. Следовательно, {f(M*{k\_n})} $\to f(A)$, а это противоречит тому, что {$f(M*{k\_n})$} -бесконечно большая последовательность.*  
*Полученное противоречие доказывает, что наше предположение не верно и, следовательно, функция $u=f(M)$ ограниченна на множестве {$M$}.*  
*\_Замечание*. Если множество {$M$} не является ограниченным или не является замкнутым, то непрерывная на таком множестве функция $u=f(M)$ может быть неограниченной на этом множестве.

*Определение*. Число U называется *точной верхней гранью* функции $u=f(M)$ на множестве {$M$}, если   
1: $\forall M \in { M}:f(M) \leq U$;  
2: $\forall\ числа\ \widetilde{U}<U\exist \widetilde{M} \in {M}:f(\widetilde{M}) > \widetilde{U}$.  
*Обозначение*: U = \sup*{{M}}f(M),*  
*Аналогично определяется точная нижняя грань функции $\int*{{M}}f(M)$.

*Теорема 12* (вторая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция достигает на этом множестве своих точных нижней и верхней граней.

Теорема доказывается так же, как и аналогичная теорема для функции одной переменной.

*Определение*. Функция $u=f(M)$ называется *равномерно непрерывной* на множестве {$M$}, если $\forall \epsilon > 0 \exist \delta >0$(зависящее только от $\epsilon$), такое, что $\forall M\_1$ и $M\_2$ из множества {$M$}, удовлетворяющих условию $\rho(M\_1,M\_2)<\delta$, выполняется неравенство

Теорема 13 (Кантора) Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция равномерно непрерывна на этом множестве.  
Теорема доказывается так же, как и для функции одной переменной.